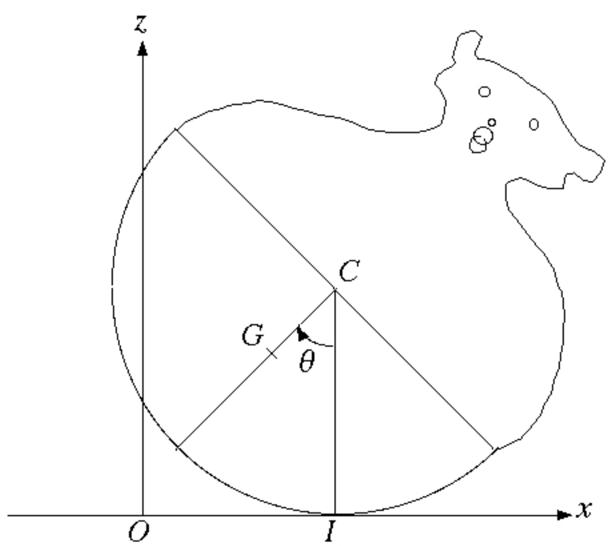
Oscillations d'un objet à fond sphérique.

Il existe de nombreuses variantes à cet exercice : demi-sphère, sphère lestée, verre de bébé qui se redresse tout seul mais vidé (qui a bien pu avoir cette idée saugrenue ?), etc. Comme la physique se cache dans la mise en équation du mouvement et non dans la recherche du centre de gravité G ni dans le calcul du moment d'inertie J, nous donnerons ici une version capable de s'adapter à tous les cas de figure. En fin d'exercice et à titre indicatif, nous montrerons dans un cas particulier comment placer G et calculer J.

Un objet quelconque de masse M est posé sur le sol par une face de forme sphérique de centre C de rayon R ; son centre de gravité G n'est pas confondu avec C et l'on note $a = \|\overrightarrow{CG}\|$.

A l'équilibre CG est bien évidemment vertical ; le point de contact avec le sol est alors choisi comme origine O ; l'axe Oz est vertical ascendant et l'on se limite aux mouvements pour lesquels le centre de gravité reste dans le plan Ozx. On note J le moment d'inertie par rapport à l'axe Gy

On note x l'abscisse du centre C et θ l'angle que fait $\overrightarrow{CG}$ avec la verticale *descendante* ; le sens positif de rotation dans le plan Ozx va de Oz vers Ox ; le vecteur rotation est donc $\overrightarrow{\omega} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{e_y}$; on note I le point de contact de la sphère avec le sol (voir figure). On se limite à l'étude de mouvements de roulement sans glissement.



Question 1 :
Quel lien y a-t-il entre $\dot{x}$, vitesse du centre C et la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ de la sphère ? En déduire un lien entre x et θ. Ce dernier lien était-il prévisible ?

Le champ des vitesses du solide est tel que

$$\overrightarrow{v}_C = \overrightarrow{v}_I + \overrightarrow{CI} \wedge \overrightarrow{\omega}$$

soit, sans oublier l'hypothèse de non glissement en I

$$\dot{x}\,\overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{0} - R\,\overrightarrow{e_z} \wedge \dot{\theta}\,\overrightarrow{e_y} = R\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_x} \qquad \text{d'où} \qquad \dot{x} = R\,\dot{\theta}$$

On en déduit par intégration, sachant qu'à l'équilibre le choix du paramétrage entraîne que x et θ sont nuls, la relation $x = R\,\theta$. Ce qui est tout a fait naturel ; pensons à la roue de vélo : quand on a fait un tour de roue ($\theta = 2\,\pi$), on a avancé de son périmètre ($x = 2\,\pi\,R$).

Question 2 :
En déduire en fonction de θ, de ses dérivées et des constantes du problème, l'énergie cinétique de la sphère lestée, son énergie potentielle de pesanteur.

Rappelons le second théorème de König dans le cas d'un solide :

$$E_{cin} = \frac{1}{2}\, M\, \overrightarrow{v_G}^2 + E^*_{cin} = \frac{1}{2}\, M\, \overrightarrow{v_G}^2 + \frac{1}{2}\, J\, \overrightarrow{\omega}^2$$

Il ne nous reste, pour exploiter cette formule, qu'à calculer $\overrightarrow{v_G}$ en la déduisant de la formule du champ des vitesses d'un solide en utilisant comme second point soit I, soit C (finalement plus aisé car les composantes de $\overrightarrow{CI}$ sont plus simples à calculer).

$$\overrightarrow{v}_G = \overrightarrow{v}_C + \overrightarrow{GC} \wedge \overrightarrow{\omega} = R\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_x} + a\,(\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_z}) \wedge \dot{\theta}\,\overrightarrow{e_y} = \dot{\theta}\,[(R - a\,\cos\theta)\,\overrightarrow{e_x} + a\,\sin\theta\,\overrightarrow{e_z}]$$

Quelques calculs simplissimes conduisent alors à

$$E_{cin} = \frac{\dot{\theta}^2}{2}\,[M\,(R - a\,\cos\theta)^2 + M\,a^2\,\sin^2\theta + J]$$

$$\text{soit encore} \qquad E_{cin} = \frac{\dot{\theta}^2}{2}\,[M\,(R^2 - 2\,a\,R\,\cos\theta + a^2) + J]$$

L'énergie potentielle de pesanteur est simplement

$$E_{pot} = M\,g\,z_G = M\,g\,(R - a\,\cos\theta)$$

Question 3 :
En déduire la période T des petites oscillations.

Le théorème de l'énergie indique que la dérivée de l'énergie mécanique (somme des énergies cinétique et potentielle de pesanteur) par rapport au temps est égale à la somme des puissances intérieure et extérieure (sauf celle de pesanteur dont on a déjà tenu compte via l'énergie potentielle). Le système étudié est un solide, les forces intérieures ne travaillent (puissance nulle donc) et il n'y a pas glissement, donc la force de contact a une puissance nulle (la vitesse du point d'application de cette force est nulle). Donc l'énergie mécanique est constante ; sa dérivée temporelle est nulle.

Dans le cadre des petites oscillations, il vaut mieux effectuer les approximations qui s'imposent avant de dériver, les calculs n'en seront que plus simples. Remplaçons donc, dans l'énergie cinétique, $\cos\theta$ par 1 et dans l'énergie potentielle par $1 - \theta^2/2$.

Ô mon fidèle lecteur, je t'imagine bondissant hors de ta chaise et hurlant à l'incohérence ; tu t'indignes que je remplace $\cos\theta$ par deux approximations différentes au gré de ma fantaisie —du moins le crois-tu— et que l'âge venant, ma logique n'est plus ce qu'elle était. Rassure-toi, ô mon lecteur préféré, mes neurones ont toujours vingt ans ; laisse-moi juste le temps de t'expliquer.

Un minimum d'imagination permet de deviner que l'objet étudié sera animé de mouvements oscillatoires qui deviendront sinusoïdaux dans l'approximation des petits angles, qui va —c'est son objet— linéariser l'équation. On aura donc, avec un choix judicieux de l'origine des temps

$$\theta = \theta_m\,\cos(\Omega\,t) \qquad \text{et} \qquad \dot{\theta} = \theta_m\,\Omega\,\sin(\Omega\,t)$$

L'approximation consiste à trouver un développement limité de l'énergie à l'ordre (différent de 0) le plus bas, ici l'ordre 2 en θ_m, caché à la fois dans θ et $\dot{\theta}$. L'énergie cinétique a en facteur $\dot{\theta}^2$, d'ordre

2 donc, pour l'autre facteur, l'ordre 0 suffira donc ($\cos\theta \approx 1$). Rien de tel pour l'énergie potentielle et l'on y développe $\cos\theta$ à l'ordre 2. Te voilà rassuré.

Donc, poursuivons :

$$E_{cin} = \frac{\dot{\theta}^2}{2}\,[M\,(R^2 - 2\,a\,R\,\cos\theta + a^2) + J] \approx \frac{\dot{\theta}^2}{2}\,[M\,(R^2 - 2\,a\,R + a^2) + J] = \frac{\dot{\theta}^2}{2}\,[M\,(R-a)^2 + J]$$

$$E_{pot} = M\,g\,z_G = M\,g\,(R - a\,\cos\theta) \approx M\,g\,z_G = M\,g\,\left[R - a\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right]$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_{cin} + E_{pot}) = \dot{\theta}\,\ddot{\theta}\,[M\,(R-a)^2 + J] + M\,g\,a\,\theta\,\dot{\theta}$$

soit, après simplification par $\dot{\theta}$

$$\ddot{\theta} = -\Omega^2\,\theta \qquad \text{avec} \qquad \Omega^2 = \frac{M\,g\,a}{M\,(R-a)^2 + J}$$

On en tire aisément les expressions de Ω et de $T = 2\,\pi\,\Omega$.

Question 4 :
L'objet est une demi sphère homogène. Donner les expressions de a, J et T en fonction de M, R et g.

Tout ce qui suit est strictement hors programme en classe de PC.

J'appelle ici O le centre de la demi-shère, Oz son axe de symétrie (la demi-sphère étant située du coté $z > 0$), R son rayon et ρ sa masse volumique uniforme. Dans ce qui suit, je ne cherche aucune élégance pour montrer comment se débrouiller dans le cas général. Un point quelconque sera repéré en coordonnées sphériques $r \in [0, R]$, $\theta \in [0, \pi/2]$ (demi-sphère) et $\varphi \in [-\pi, \pi]$; les coordonnées cartésiennes s'écrivent alors $x = r\,\sin\theta\,\cos\varphi$, $y = r\,\sin\theta\,\sin\varphi$ et $z = r\,\cos\theta$; l'élément de volume est $\mathrm{d}V = r^2\,\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

La masse de la sphère est

$$M = \iiint \rho\,\mathrm{d}V = \rho\,\iiint r^2\,\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \rho\,\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\,\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\int_0^R r^2\,\mathrm{d}r = \rho\cdot 2\,\pi\cdot 1\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{2\,\pi}{3}\,\rho\,R^3$$

Ce calcul n'est utile que pour ceux qui auraient oublié la formule donnant le volume d'une sphère et dont c'est ici –presque— la démonstration. La position du centre de gravité, sur Oz par symétrie, est donnée par définition du barycentre par

$$M\,z_G = \iiint z\,\rho\,\mathrm{d}V = \rho\,\iiint r^3\,\sin\theta\,\cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$\rho\,\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\,\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r = \rho\cdot 2\,\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{4}\,\rho\,R^4$$

On reporte l'expression de M pour en déduire z_G qui s'identifie au $a = OG$ des questions précédentes :

$$a = z_G = \frac{3}{8}\,R$$

Le moment d'inertie par rapport à l'axe Gy pourrait certes se calculer grâce à la formule de HUYGENS et le calcul du moment par rapport à l'axe Oy mais celui-ci est à peine plus simple à calculer, sauf à parachuter une formule apprise par cœur et valable uniquement dans un cas particulier ; préférons donc le calcul direct. La définition du moment par rapport à Gy donne $J = \iiint \rho\, d^2\, \mathrm{d}V$ où d est la distance du point courant à l'axe Gy soit $d^2 = x^2 + (z-a)^2$; J est donc somme de 4 termes, respectivement

$$J_1 = \iiint x^2\, \rho\, \mathrm{d}V = \rho \iiint r^4\, \sin^3\theta\, \cos\varphi^2\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi =$$
$$\rho \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\varphi\, \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\, \mathrm{d}\theta \int_0^R r^4\, \mathrm{d}r = \rho \cdot \pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{2\,\pi}{15}\, \rho\, R^5$$

$$J_2 = \iiint z^2\, \rho\, \mathrm{d}V = \rho \iiint r^4\, \sin\theta\, \cos^2\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi =$$
$$\rho \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, \sin\theta\, \mathrm{d}\theta \int_0^R r^4\, \mathrm{d}r = \rho \cdot 2\,\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{2\,\pi}{15}\, \rho\, R^5$$

$$J_3 = -\iiint 2\, a\, z\, \rho\, \mathrm{d}V = -2\, \rho\, a \iiint r^3\, \sin\theta\, \cos\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi =$$
$$-\,2\, \rho\, a \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, \sin\theta\, \mathrm{d}\theta \int_0^R r^3\, \mathrm{d}r = -2\, \rho\, a \cdot 2\,\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{R^4}{4} = -\frac{\pi}{2}\, \rho\, a\, R^4$$

$$J_4 = \iiint a^2\, \rho\, \mathrm{d}V = \rho\, a^2 \iiint r^2\, \sin\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi =$$
$$\rho\, a^2 \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, \mathrm{d}\theta \int_0^R r^2\, \mathrm{d}r = \rho \cdot 2\,\pi \cdot 1 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{2\,\pi}{3}\, \rho\, a^2\, R^3$$

On a fait, dans tout ces calculs, l'hypothèse que le valeureux lecteur est suffisamment aguerri pour calculer les intégrales trigonométriques classiques ; il eût été discourtois de ne pas le faire. Il reste maintenant à remplacer a par $3/8\, R$, à sommer puis, si l'on veut, factoriser $M = 2/3\, \pi\, \rho\, R^3$

$$J = \frac{2\,\pi}{15}\, \rho\, R^5 + \frac{2\,\pi}{15}\, \rho\, R^5 - \frac{\pi}{2}\, \rho \left(\frac{3}{8}\, R\right) R^4 + \frac{2\,\pi}{3}\, \rho \left(\frac{3}{8}\, R\right)^2 R^3 =$$
$$\pi\, \rho\, R^5 \left(\frac{2}{15} + \frac{2}{15} - \frac{3}{16} + \frac{3}{32}\right) = \frac{83}{480}\, \pi\, \rho\, R^5 = \frac{2}{3}\, \pi\, \rho\, R^3\, \frac{83}{320}\, R^2 = \frac{83}{320}\, M\, R^2$$

Pour finir en beauté, il suffit de reporter les expressions de a et J dans $\Omega^2 = \frac{M\, g\, a}{M\,(R-a)^2 + J}$ pour avoir la période petites oscillations d'une demi-sphère ; autant dire que tout cela est très calculatoire et que dans cette dernière question, on n'a pas fait beaucoup de physique ; jadis, on était bien obligé de savoir faire ces calculs mais, aujourd'hui, le développement des logiciels de calcul formel nous affranchit de cette contrainte.